

Numeri complessi

Sappiamo che l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ammette soluzioni reali.

Introduciamo il numero i (UNITÀ IMMAGINARIA) che verifica

$$i^2 = -1$$

Pertanto $a > 0$

$$\begin{aligned} x^2 + a &= x^2 + (\sqrt{a})^2 = x^2 - i^2 (\sqrt{a})^2 = x^2 - (i\sqrt{a})^2 \\ &= (x - i\sqrt{a})(x + i\sqrt{a}) \end{aligned}$$

l'equazione $x^2 + a = 0$ ammette due radici: $x = -i\sqrt{a}$ o $x = i\sqrt{a}$

Definizione Un NUMERO COMPLESSO è un numero della forma

$$z = x + iy \quad \text{con } x, y \in \mathbb{R}$$

Il numero reale x si chiama PARTE REALE di z e si denota $\operatorname{Re}(z) = x$

Il numero reale y si chiama PARTE IMMAGINARIA di z e si denota $\operatorname{Im}(z) = y$

L'insieme dei numeri complessi si denota con

$$\mathbb{C} := \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

I numeri complessi della forma iy con $y \in \mathbb{R}$ si dicono numeri immaginari puri.

Osservazione L'insieme dei numeri reali è contenuto in $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0\}$$

Esempi

- $z = 2 + 3i$ $\operatorname{Re}(z) = 2, \operatorname{Im}(z) = 3$
- $z = -i$ $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = -1$ z è un numero immaginario puro
- $z = \sqrt{2}$ $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{2}, \operatorname{Im}(z) = 0$ z è un numero reale

Definizione Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ allora

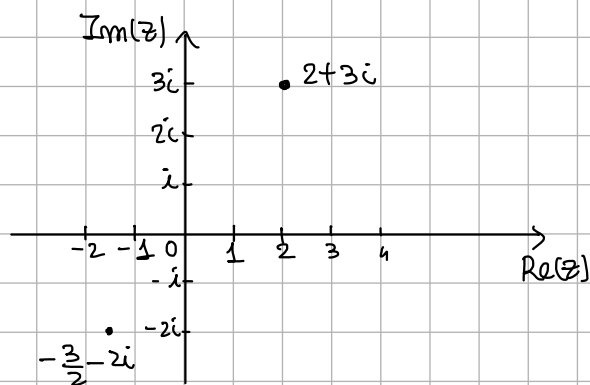
$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \\ \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \end{cases}$$

Notazione La rappresentazione $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$ si chiama FORMA ALGEBRICA del numero complesso z

I numeri complessi possono essere identificati con i punti di un piano

(PIANO COMPLESSO oppure PIANO di GAUSS): il numero complesso $z = x + iy$

prevede corrispondere la coppia ordinata (x, y) , che rappresenta le coordinate di un punto in un riferimento cartesiano.



nel piano complesso l'asse x si chiama
ASSE REALE mentre l'asse y si chiama
ASSE IMMAGINARIO

Operazioni tra numeri complessi

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, definiamo

$$z_1 + z_2 := x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Osservazione le operazioni precedenti sono operazioni "naturali"

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1 x_2 + x_1(iy_2) + iy_1 x_2 + iy_1 iy_2 \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

Esempi

$$(2-i)(4+3i) = 8 + 6i - 4i - 3i^2 = 11 + 2i$$

$$i(4-i) = 4i - i^2 = 1 + 4i$$

Si può verificare che la somma e il prodotto in $\mathbb{C}$ verificano le stesse proprietà delle somme e del prodotto in $\mathbb{R}$ ($+$, $\cdot$ sono associative e commutative, $\cdot$ è distributivo rispetto alle $+$)

In particolare

- $\forall z \in \mathbb{C} \quad \exists -z \in \mathbb{C}$ tale che $z + (-z) = 0$
- $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \exists z^{-1} = \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ tale che $z \cdot z^{-1} = 1$
- vale la legge di annullamento del prodotto
 $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 0$

Se $z = x + iy$ allora $-z = -x - iy$

Se $z = x + iy \neq 0$ allora $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2}$

Come otteniamo la rappresentazione di z^{-1} ?

Definizione Sia $z \in \mathbb{C}$ si chiama **MODULO** di $z = x + iy$ il numero reale

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

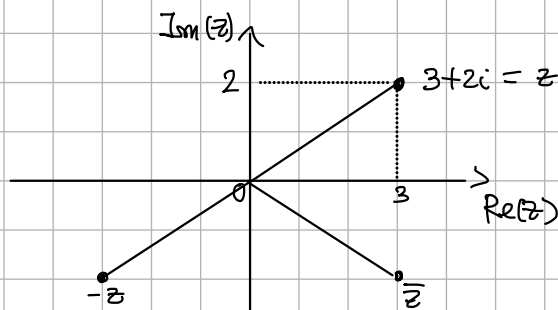
Osservazione Per il modulo di un numero complesso si usa lo stesso notazione del valore di un numero reale: questa scelta è coerente poiché il modulo di un numero reale coincide con il valore assoluto

Osservazione Del teorema di Pitagora segue che $|z|$ è uguale alla lunghezza del segmento $\overline{OP}$, dove $P=(x,y)$ se $z=x+iy$

Definizione Sia $z=x+iy \in \mathbb{C}$ con $x,y \in \mathbb{R}$. Definiamo CONIUGATO di z e lo denotiamo con $\bar{z}$ il numero complesso

$$\bar{z} := x - iy = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$$

Osservazione Mentre $-z$ si ottiene da z tramite una simmetria rispetto all'origine, $\bar{z}$ si ottiene da z mediante una simmetria rispetto all'asse reale



Osserviamo che se $z=x+iy \in \mathbb{C}$ con $x,y \in \mathbb{R}$

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

allora se $z \neq 0$

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \cdot z \cdot \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} |z|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{concludiamo che } z^{-1} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} (x-iy) \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i \end{aligned}$$

Esercizio Sia $z = \frac{2+i}{4+3i}$ determinare $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$

$$\begin{aligned} z &= (2+i) \cdot \frac{1}{4+3i} = \frac{2+i}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{8-6i+4i-3i^2}{4^2-(3i)^2} = \frac{11-2i}{4^2+3^2} = \frac{11-2i}{25} \\ &= \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{11}{25}, \quad \operatorname{Im}(z) = -\frac{2}{25} \end{aligned}$$

Proprietà dei numeri complessi:

$$1) \forall z, w \in \mathbb{C} : \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C} : \overline{-z} = -\bar{z}$$

$$3) \forall z \in \mathbb{C} : \overline{\bar{z}} = z$$

$$4) \forall z \in \mathbb{C} : z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$5) \forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$6) \forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = |z|^2 \quad \text{e quindi in particolare } \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$7) \forall z, w \in \mathbb{C} : w \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

$$8) \forall z \in \mathbb{C} : |z| \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad |z| \geq 0$$

$$9) \forall z \in \mathbb{C} : |-z| = |z| \quad \text{e} \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$10) \forall z \in \mathbb{C} : |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$11) \forall z, w \in \mathbb{C} : |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

$$12) \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} : |z^n| = |z|^n$$

$$13) \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |z^{-1}| = |z|^{-1}$$

$$14) \forall z \in \mathbb{C}: |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ e } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$$

$$15) \forall z, w \in \mathbb{C}: |z+w| \leq |z| + |w| \quad 1^{\circ} \text{ disuguaglianza triangolare}$$

$$16) \forall z, w \in \mathbb{C}: ||z| - |w|| \leq |z - w| \quad 2^{\circ} \text{ disuguaglianza triangolare}$$

Forma trigonometrica di un numero complesso

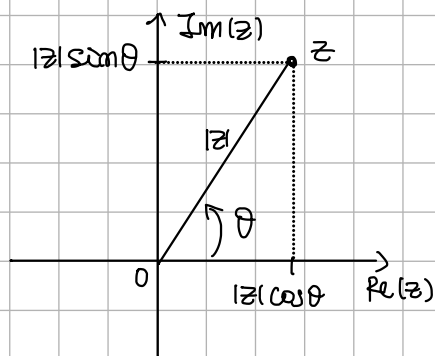
Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

Possiamo scrivere z nella forma $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ questa rappresentazione si chiama FORMA TRIGONOMETRICA oppure FORMA POLARE di z

θ si chiama ARGOMENTO di z e non è univocamente determinato, con $\arg(z)$ denotiamo l'insieme degli argomenti di z

Si chiama ARGOMENTO PRINCIPALE di z e si denota $\operatorname{Arg}(z)$ l'unico $\theta \in [0, 2\pi)$ tale da $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\arg(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos \theta$$

$$\operatorname{Im}(z) = |z| \sin \theta$$

Osservazioni

- Se $z = 0$ l'argomento di z non è definito
- Se $z \neq 0$ allora $\operatorname{Arg}(z)$ soddisfa

$$\begin{cases} \operatorname{Arg}(z) \in [0, 2\pi) \\ \cos(\operatorname{Arg}(z)) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \\ \sin(\operatorname{Arg}(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} \end{cases}$$

Pertanto $z = x + iy \neq 0$ possiamo determinare $\operatorname{Arg}(z)$ nel seguente modo

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & \text{se } x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & \text{se } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

idee: $z = x + iy \neq 0$

$$x = |z| \cos \theta$$

$$y = |z| \sin \theta$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

Osservazione Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Allora

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2) \end{cases}$$

Esempio

1) $z = i$ $\text{Re}(z) = 0$, $\text{Im}(z) = 1$

$$|z| = 1$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$$

la forma trigonometrica di z è $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

2) $z = 1 - i$ $\text{Re}(z) = 1$, $\text{Im}(z) = -1$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

calcoliamo θ tale che

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\text{Re}(z)}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(z) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{4}$$

la forma trigonometrica di z è $z = \sqrt{2} (\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$

Proposizione Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z_1 = |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

Allora

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

dimostrazione: Dalle formule di addizione per cos e sin otteniamo

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) |z_2| (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) \\ &= |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \end{aligned}$$

$$\text{Calcoliamo } z_2^{-1} = \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

$$z_2^{-1} = \frac{|z_2| (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|} (\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2))$$

Applicando le formule di moltiplicazione otteniamo $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} \quad \square$

Formule di De Moivre

Sia $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$

Allora $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

Esempio Sia $z = 1 + i\sqrt{3}$ calcolare z^9

$$|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

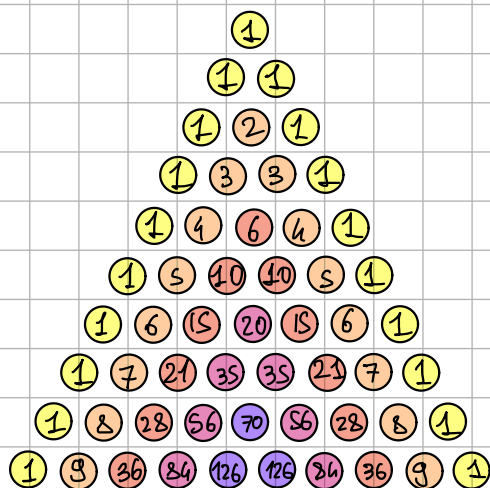
cerchiamo θ tale che

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{aligned} z &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow z^9 = 2^9 \left(\cos \left(9 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(9 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= 2^9 \left(\cos(3\pi) + i \sin(3\pi) \right) \\ &= 2^9 (-1 + i \cdot 0) = -2^9 = -512 \end{aligned}$$

E' stato conveniente usare la formula di De Moivre? certo che si!

Altrimenti con il triangolo di Tartaglia



$$(A+B)^9 = A^9 + 9A^8B + 36A^7B^2 + 84A^6B^3 + 126A^5B^4 + 126A^4B^5 + 84A^3B^6 + 36A^2B^7 + 9AB^8 + B^9 \rightarrow \text{con } A=1, B=i\sqrt{3} \text{ il calcolo diventa molto lungo}$$

Forma esponenziale di un numero complesso

Dato un angolo θ definiamo $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Un questo modo il numero complesso $z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$

si può riscrivere $z = |z| e^{i\theta}$, la rappresentazione $z = |z| e^{i\theta}$ si chiama FORMA ESPONENZIALE del numero z

Osservazione Utilizzando la forma esponenziale $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$, $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$

allora $z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Altrimenti $z = |z| e^{i\theta}$ e $n \in \mathbb{N} \Rightarrow z^n = |z|^n e^{in\theta}$